Η (μέση) τιμή, τιμή δεν έχει

Σχεδόν σε κάθε σύγγραμμα Φυσικής πριν οριστεί την έννοια της στιγμιαίας τιμής ενός μεγέθους ορίζετε η λεγόμενη «μέση τιμή» του.

Ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση όπου θέλουμε να ορίσουμε την έννοια της επιτάχυνσης ενός κινητού, σε μία διάσταση. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το κινητό μας κινείται επάνω σε μια ευθεία γραμμή[1] και ότι κατά την χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της ταχύτητας του ήταν u_1, ενώ σε μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή $t_2(> t_1)$ ήταν u_2.

Ορίζει λοιπόν κάποιος τη λεγόμενη «μέση επιτάχυνση» ως:

$$\bar{a} \coloneqq \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta u}{\Delta t} \tag{1}$$

όπου $\Delta u \equiv u_2 - u_1$ και $\Delta t \equiv t_2 - t_1$.

Ποια είναι η φυσική σημασία του μεγέθους $\bar{a}$ όπως εισάγεται από την εξίσωση (1); Μήπως αναπαριστά κάποιου τύπου μέσο όρο; Έχει κάποια φυσική σημασία; Κάθε άλλο! Άλλωστε ο τρόπος ορισμού του $\bar{a}$ παραπέμπει σε «οιονεί μέγεθος» μιας και είναι μια καθαρά Μαθηματική κατασκευή η οποία δεν υφίσταται σε πραγματικό (φυσικό) επίπεδο.

Το μόνο που μπορεί να μας δώσει η (1) δεν είναι άλλο παρά ποιά σταθερή (κατά μέτρο) επιτάχυνση θα πρέπει να είχε το κινητό ώστε μέσα σε χρόνο Δt να μεταβληθεί η ταχύτητα του κατά Δu.

Ας δούμε λίγα Μαθηματικά τώρα. Έστω μια συνάρτηση f ολοκληρώσιμη σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Ορίζουμε ως μέση τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$, και συμβολίζουμε $\langle f \rangle$, με τον αριθμό:

$$\langle f \rangle \coloneqq \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \tag{2}$$

εν όψει της οποίας, αυστηρά Μαθηματικά, η μέση επιτάχυνση του κινητού μας κατά το χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ θα είναι:

$$\langle a \rangle \coloneqq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt \tag{3}$$

Άμεσα μπορεί κάποιος να συμπεράνει ότι όταν $u(t) = const.$ τότε (και μόνο τότε) η τιμή $\langle a \rangle$ όπως ορίζεται μέσω της (3) ταυτίζεται (αριθμητικά και επ' ουδενί εννοιολογικά) με την τιμή $\bar{a}$ όπως αυτή ορίζεται μέσω της (1).

Στον Διαφορικό Λογισμό ο αριθμός $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ ονομάζεται πηλίκο διαφορών (της συνάρτησης a) και η μοναδική συσχέτιση του με την παράγωγο $\frac{da}{dt}$ είναι αυτή που σκιαγραφείται μέσω της οριακής διαδικασίας:

---

[1] Πρόκειται καθαρά για μεθοδολογικό περιορισμό γιατί στην περίπτωση μη μονοδιάστατης κίνησης θα πρέπει να αναφερθούμε σε παραγώγους διανυσματικών συναρτήσεων.

$$\frac{da}{dt} \coloneqq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a}{\Delta t} \tag{4}$$

Σημειωτέον ότι μεταξύ των μεγεθών $\frac{df}{dx}$ (παράγωγος της συνάρτησης f, ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x) και $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (πηλίκο διαφορών της f, ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x) υπάρχει εννοιολογική διαφορά. Για παράδειγμα το πηλίκο $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ είναι πάντα ένας πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το μόρφωμα $\frac{df}{dx}$, το οποίο μπορεί να μην έχει καν νόημα (στην περίπτωση όπου η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη) ή να είναι το $\pm\infty$.

Ας επανέλθουμε πάλι σε επίπεδο Φυσικής. Όπως είπαμε ήδη το $\bar{a}$ αποτελεί οιονεί μέγεθος και στερείται φυσικής σημασίας. Άραγε το $\langle a \rangle$ έχει κάποια φυσική σημασία; Η απάντηση είναι καταφατική. Στο σημείο αυτό σας παραπέμπω σε οποιοδήποτε κείμενο[2] στοιχειώδους Ολοκληρωτικού Λογισμού και στην γεωμετρική σημασία της μέσης τιμής μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Αριθμητικό Παράδειγμα

Υποθέτουμε ότι ένα κινητό κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u(t) = t^2 + t$. Ζητείται η μέση επιτάχυνση του κατά το χρονικό διάστημα $t = 0$ έως $t = 10$.
Οι τιμές όλων των μεγεθών είναι σε μονάδες του S.I.

Λύση
Με βάση τον συνήθη ορισμό της μέσης επιτάχυνσης θα έχουμε:

$$\bar{a} = \frac{u(10) - u(0)}{10 - 0} = \frac{100 + 10 - 0}{10} \Rightarrow \boxed{\bar{a} = 11ms^{-2}}$$

Με βάση τον Μαθηματικό ορισμό της μέσης επιτάχυνσης θα έχουμε:

$$\langle a \rangle = \frac{1}{10}\int_0^{10} u(t)dt = \frac{1}{10}\int_0^{10} (t^2 + t)dt = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^{10} \Rightarrow \boxed{\langle a \rangle = 38{,}3ms^{-2}}$$

Κάθε άλλο παρά έκπληξη θα πρέπει να μας προκαλεί το γεγονός ότι οι δυο τιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους!

Γιάννης Γ. Ψυχογιός
Χημικός Μηχανικός Ε.Μ.Π

[2] Κατάλληλο είναι και το σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου.