ΛΥΣΕΙΣ 3ου ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ Τ.Ε.Ε

ΘΕΜΑ 1

i) Είναι:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 90° \Rightarrow \theta_3 = 45°$$

$$\theta_4 + \theta_5 = 90° \Rightarrow \theta_5 = 60°$$

$$\theta_6 + \theta_7 = 90° \Rightarrow \theta_7 = 45°$$

$$\theta_8 = 90°$$

ii) Είναι $\delta = 2$ και $\lambda = 5$, οπότε:

$$f_1 = \frac{\theta_1}{360°} = \frac{30°}{360°} = \frac{1}{12}, \quad f_2 = \frac{\theta_2}{360°} = \frac{15°}{360°} = \frac{1}{24}$$

$$f_3 = \frac{\theta_3}{360°} = \frac{45°}{360°} = \frac{1}{8}, \quad f_4 = \frac{\theta_4}{360°} = \frac{30°}{360°} = \frac{1}{12}$$

$$f_5 = \frac{\theta_5}{360°} = \frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}, \quad f_6 = \frac{\theta_6}{360°} = \frac{45°}{360°} = \frac{1}{8}$$

$$f_7 = \frac{\theta_7}{360°} = \frac{45°}{360°} = \frac{1}{8}, \quad f_8 = \frac{\theta_8}{360°} = \frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$$

και ο πίνακας έχει ως εξής:

Α/Α κλάσης	Αριθμός τσιγάρων [–)	Σχετική Συχνότητα f_i
1	[0 - 2)	1/12
2	[2 - 4)	1/24
3	[4 - 6)	1/8
4	[6 - 8)	1/12
5	[8 - 12)	1/6
6	[12 -16)	1/8
7	[16 – 20)	1/8
8	[20 - 24)	1/4

iii) Καταρχήν παρατηρήστε ότι δε γνωρίζουμε το μέγεθος του δείγματος ν. Αλλά δε μας χρειάζεται για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή, διότι:

$$\bar{x} = \frac{\nu_1 K_1 + \nu_2 K_2 + \cdots + \nu_8 K_8}{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_8} = \frac{\nu_1 K_1 + \nu_2 K_2 + \cdots + \nu_8 K_8}{\nu} = \frac{\nu_1}{\nu} K_1 + \frac{\nu_2}{\nu} K_2 + \cdots + \frac{\nu_8}{\nu} K_8 \Rightarrow$$

$$\bar{x} = f_1 K_1 + f_2 K_2 + \cdots + f_8 K_8$$

[*Βασικός τύπος... Βάλτε τον στα υπόψην !!!*]

Α/Α κλάσης	Αριθμός τσιγάρων [–)	Σχετική Συχνότητα f_i	K_i	f_iK_i
1	[0 - 2)	1/12	1	1/12
2	[2 - 4)	1/24	3	1/8
3	[4 - 6)	1/8	5	5/8
4	[6 - 8)	1/12	7	7/12
5	[8 - 12)	1/6	10	5/3
6	[12 -16)	1/8	14	7/4
7	[16 - 20)	1/8	18	9/4
8	[20 - 24)	1/4	22	11/2
Άθροισμα		1		$151/12 \cong 12.6$

iv) Αφού $s^2 = 7.2^2 \Rightarrow s = 7.2$, οπότε:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{7.2}{12.6} \cong 0.57 = 57\% > 10\%$$

άρα το δείγμα είναι μη ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 2

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\left(1-\sqrt{x-1}\right)\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{(x^2-4)\left(1+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1^2-\sqrt{x-1}^2}{(x^2-4)\left(1+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{(x-2)(x+2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)} = -\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x+2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)} = -\frac{1}{4\cdot(1+1)} = -\frac{1}{8}$$

και

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{3a}{x^3}+1\right) = \frac{3a}{8}+1 = f(2)$$

οπότε η f είναι συνεχής στο $x = 2$, αν και μόνο άν:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{3a}{8}+1 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 3a+8 = -1 \Leftrightarrow a = -3$$

ΘΕΜΑ 3

i)

$$f(x) \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1), \forall x > 0 \Rightarrow$$

Στο $x = 1$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Άρα από θεώρημα Fermat (γιατί;):

$$f'(1) = 0 \quad (1)$$

Αλλά:

$$f'(x) = \left(lnx - \frac{a}{x} + a\right)' = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}, x > 0$$

οπότε $f'(1) = 1 + a$ (2). Από (1) και (2):

$$a = -1$$

ii) Αφού $a = -1$, είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}, x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} > 0 \overset{x^2>0}{\Longleftrightarrow} x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} < 0 \overset{x^2>0}{\Longleftrightarrow} x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Άρα η f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$
- Γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

και παρουσιάζει τοπικό (εν προκειμένω και ολικό) ελάχιστο στο $x = 1$ το οποίο ισούται νε $f(1) = 0$.

ΘΕΜΑ 4

Το κέρδος είναι:

$$Q(x) = K(x) - P(x) = \frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 135x + 500 + x^2 - 90x \Rightarrow$$

$$Q(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 45x + 500, x \in (0,60]$$

$$Q'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 45x + 500\right)' = x^2 - 18x + 45, x \in (0,60]$$

$$Q'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$\Delta = 324 - 180 = 144$$

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm 12}{2} = \begin{cases} 3 \\ 15 \end{cases}$$

οπότε $Q'(x) < 0 \Rightarrow 3 < x < 15$ και $Q(x) > 0 \Rightarrow x < 3$ ή $x > 15$. Άρα, η Q είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο $(3,15)$
- Γνησίως αύξουσα στο $(0,3) \cup (15,60]$

και παρουσιάζει μέγιστο στο:

- $x = 3$, το οποίο ισούται με $Q(3) = 563$
- $x = 60$, το οποίο ισούται με $Q(6) = 42800$ (*προσοχή: στο x=6 έχουμε ακρότατο διότι η Q είναι ορισμένη σε αριστερά ανοικτό – δεξιά κλειστό διάστημα*).

Αφού $Q(60) > Q(3)$ το μέγιστο κέρδος είναι το $Q(60) = 42800$ χιλιάδες €, και επιτυγχάνεται για παραγωγή 60 μονάδων.