ΛΥΣΕΙΣ 2ου ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ Τ.Ε.Ε

ΘΕΜΑ 1

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} &= \frac{(ay_1 + b) + (ay_2 + b) + \cdots + (ay_N + b)}{N} \\
&= \frac{ay_1 + ay_2 + \cdots + ay_N + Nb}{N} = \frac{a(y_1 + y_2 + \cdots + y_N) + Nb}{N} \\
&= \frac{a(y_1 + y_2 + \cdots + y_N)}{N} + \frac{Nb}{N} = a\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_N}{N} + b = a\bar{y} + b
\end{aligned}$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned}
s_x^2 = \frac{(\bar{x} - x_1)^2 + \cdots + (\bar{x} - x_N)^2}{N} &= \frac{\big(a\bar{y} + b - (ay_1 + b)\big)^2 + \cdots + \big(a\bar{y} + b - (ay_N + b)\big)^2}{N} \\
&= \frac{(a\bar{y} + b - ay_1 - b)^2 + \cdots + (a\bar{y} + b - ay_N - b)^2}{N} \\
&= \frac{a^2(\bar{y} - y_1)^2 + \cdots + a^2(\bar{y} - y_N)^2}{N} = a^2\frac{(\bar{y} - y_1)^2 + \cdots + (\bar{y} - y_N)^2}{N} \\
&= a^2 s_y^2
\end{aligned}$$

γ) Είναι:

$$CV_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{as_y}{a\bar{y} + b} = \frac{5}{20} = 25\% > 10\%$$

οπότε ο πληθυσμός του δείγματος ως πρός τη μεταβλητή x είναι μη ομοιογενής.

ΘΕΜΑ 2

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Επομένως, για να είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της, αρκεί να είναι συνεχής και στο $x = 0$, δηλαδή αρκεί να είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = a \tag{1}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} \\
= \lim_{x\to 0} \frac{\big(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}\big)\big(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}\big)\big(\sqrt{1+x} + 1\big)}{\big(\sqrt{1+x} - 1\big)\big(\sqrt{1+x} + 1\big)\big(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}\big)}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{[1+x-(1+x^2)]\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{(1+x-1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-x)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1.(1+1)}{1+1} = 1$$

οπότε από την (1), λαμβάνουμε: $\boxed{a=1}$.

ΘΕΜΑ 3

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$. Επομένως, για να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί να είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x=1$.

Καταρχήν επιβάλουμε να είναι συνεχής στο $x=1$, οπότε απαιτούμε να ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \qquad (1)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+ax+b) = 1+a+b$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{x^2+3} = 2$$

και $f(1) = 1+a+b$

οπότε από την (1), έχουμε: $1+a+b=2 \Leftrightarrow$

$$a+b=1 \qquad (2)$$

Η f θα είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$, αν και μόνο αν:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \qquad (3)$$

Είναι:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2+a(1+h)+b-(1+a+b)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2+ah-1}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h(2+a+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-}(2+a+h) = 2+a$$

και

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{(1+h)^2+3}-2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{(1+h)^2+3}-2\right)\left(\sqrt{(1+h)^2+3}+2\right)}{h\left(\sqrt{(1+h)^2+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2+3-4}{h\left(\sqrt{(1+h)^2+3}+2\right)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h(2+h)}{h\left(\sqrt{(1+h)^2+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2+h}{\left(\sqrt{(1+h)^2+3}+2\right)} = \frac{1}{2}$$

οπότε με αντικατάσταση στην (3) έχουμε:

$$2 + a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

Από την (2), τέλος έχουμε ότι: $\boxed{b = \frac{5}{2}}$.

β) Για $x \in (-\infty, 1)$ είναι: $f'(x) = \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)' = 2x - \frac{3}{2}$.

Για $x \in (1, +\infty)$ είναι: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \frac{(x^2+3)'}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Από το ερώτημα α) έχουμε ότι $f'(1) = \frac{1}{2}$, οπότε:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{3}{2} & , x \in (-\infty, 1] \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} & , x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4

Α.

i) Έχουμε:

$$f'(x) = \left[ax^2 + \frac{b}{x}\right]' = 2ax - \frac{b}{x^2}, x \in \mathbb{R}^*$$

και

$$f''(x) = \left[ax^2 + \frac{b}{x}\right]'' = \left(2ax - \frac{b}{x^2}\right)' = (2\alpha x)' - b\left[-\frac{(x^2)'}{(x^2)^2}\right] = 2a + \frac{2b}{x^3}, x \in \mathbb{R}^*$$

οπότε, είναι:

$$x^2 f''(x) = x^2\left(2a + \frac{2b}{x^3}\right) = 2\left(ax^2 + \frac{b}{x}\right) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}^*$$

ii) Είναι $f(2) = 4a + \frac{b}{2}$ και $f'(2) = 4a - \frac{b}{4}$, οπότε:

$$\begin{cases} f(2) = 2 \\ f'(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + \dfrac{b}{2} = 2 \\ 4a - \dfrac{b}{4} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{4}{3} \\ a = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Β. Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, με:

$$f'(x) = [(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \cdots + (a_Nx - b_N)^2]'$$
$$= 2a_1(a_1x - b_1) + 2a_2(a_2x - b_2) + \cdots + 2a_N(a_Nx - b_N)$$

Θέτουμε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2a_1(a_1x - b_1) + 2a_2(a_2x - b_2) + \cdots + 2a_N(a_Nx - b_N) = 0 \Leftrightarrow$

$$2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2)x - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_Nb_N) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_Nb_N}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2}$$

Επίσης είναι:

$$f''(x) = [2a_1(a_1x - b_1) + 2a_2(a_2x - b_2) + \cdots + 2a_N(a_Nx - b_N)]'$$
$$= 2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2) > 0$$

Άρα η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο για $x = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_Nb_N}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2}$.