2ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ Τ.Ε.Ε

ΘΕΜΑ 1

Έστω x, y δυο ποσοτικές μεταβλητές που συνδέονται με τη σχέση $x = ay + b$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\bar{x} = a\bar{y} + b$

β) $s_x^2 = a^2 s_y^2$

γ) Αν $a = 1, b = 10, \bar{y} = 10$ και $s_y = 5$ να δείξετε ότι ο πληθυσμός του δείγματος ως πρός τη μεταβλητή x είναι μη ομοιογενής.

ΘΕΜΑ 2

Να προσδιορίσετε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1} & , x \in (0, +\infty) \\ a & , x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & , x \in (-\infty, 1] \\ \sqrt{x^2 + 3} & , x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

α) Να προσδιορίσετε τα $a, b \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

β) Να δώσετε τον τύπο της f'.

ΘΕΜΑ 4

A. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}, x \in \mathbb{R}^*$.
   i) Να αποδείξετε ότι: $x^2 f''(x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}^*$
   ii) Να βρείτε τα $a, b \in \mathbb{R}$ αν $f(2) = 2$ και $f'(2) = 3$.

B. Αν $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, με $i = 1,2,\dots,N$ και a_i όχι όλα ταυτόχρονα μηδέν, να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης με τύπο:

$$f(x) = (a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \cdots + (a_N x - b_N)^2$$

εμφανίζεται στο σημείο $x = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_N b_N}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2}$.