ΛΥΣΕΙΣ 1^{ου} ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ Τ.Ε.Ε

ΘΕΜΑ 1

α) Είναι: $\bar{x} = \frac{8lna + 2a^2 - 12a + 8}{4} = 2lna + \frac{1}{2}a^2 - 3a + 2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(a) = 2lna + \frac{1}{2}a^2 - 3a + 2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με:

$$f'(a) = \left(2lna + \frac{1}{2}a^2 - 3a + 2\right)' = \frac{2}{a} + a - 3$$

Είναι: $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{a} + a - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 + a^2 - 3a = 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

Επιπλέον, έχουμε: $f''(a) = \left(\frac{2}{a} + a - 3\right)' = -\frac{2}{a^2} + 1$, οπότε:

$f''(1) = -2 + 1 = -1 < 0$, οπότε η f παρουσιάζει στο $a = 1$ τοπικό μέγιστο

$f''(2) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$, οπότε η f παρουσιάζει στο $a = 2$ τοπικό ελάχιστο

Ώστε η $\bar{x}$ γίνετε μέγιστη για $a = 1$ και ελάχιστη για $a = 2$.

β) Για $a = 1$, έχουμε:

$\bar{x} = 2ln1 + \frac{1}{2}1^2 - 3.1 + 2 = -\frac{1}{2}$

και

$$s = \sqrt{\frac{\left(-\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-12\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-8\right)^2}{4}} = \frac{\sqrt{235}}{4}$$

οπότε $CV = \frac{s}{\bar{x}} = -\frac{\sqrt{235}}{2} < 10\%$, άρα το δείγμα είναι μη ομοιογενές.

Ομοίως για την περίπτωση $a = 2$.

ΘΕΜΑ 2

Για να είναι η F παράγουσα της f πρέπει να είναι:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} F'(x) &= [(A\sigma\upsilon\nu x + B\eta\mu x)e^{-x}]' = (A\sigma\upsilon\nu x + B\eta\mu x)'e^{-x} + (A\sigma\upsilon\nu x + B\eta\mu x)(e^{-x})' \\ &= (-A\eta\mu x + B\sigma\upsilon\nu x)e^{-x} - (A\sigma\upsilon\nu x + B\eta\mu x)e^{-x} \\ &= (-A\eta\mu x + B\sigma\upsilon\nu x - A\sigma\upsilon\nu x - B\eta\mu x)e^{-x} \\ &= [-(A+B)\eta\mu x - (A-B)\sigma\upsilon\nu x]e^{-x} \end{aligned}$$

οπότε:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$[-(A+B)\eta\mu x - (A-B)\sigma\upsilon\nu x]e^{-x} = e^{-x}\sigma\upsilon\nu x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$-(A+B)\eta\mu x - (A-B)\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} A = -1/2 \\ B = 1/2 \end{matrix}}$$

ΘΕΜΑ 3

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$ ως πολυωνιμική. Επομένως για να είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$.

Αναγκαία συνθήκη για να είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$ είναι να είναι συνεχής στο σημείο αυτό, δηλαδή να ισχύει:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \qquad (1)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x^2 + \beta) = 8 + \beta$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2\alpha x^3 + 11\alpha) = 16\alpha + 11\alpha = 27\alpha$$

$$f(2) = 8 + \beta$$

οπότε από την (1) λαμβάνουμε:

$$8 + \beta = 27\alpha \Leftrightarrow$$

$$\beta = 27\alpha - 8 \qquad (2)$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x = 2$ πρέπει:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \qquad (3)$$

Είναι:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2(2+h)^2 + \beta) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(2+h)^2 + \beta - 8 - \beta}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{8h + 2h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(8+2h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} (8+2h) = 8$$

και

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{[2\alpha(2+h)^3 + 11\alpha] - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{2\alpha(2+h)^3 + 11\alpha - 8 - \beta}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{2\alpha(2+h)^3 + 11\alpha - 8 - 27\alpha + 8}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2\alpha(2+h)^3 - 16\alpha}{h} \\
&= 2\alpha \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = 2\alpha \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3 + 6x^2 + 12h + 8 - 8}{h} \\
&= 2\alpha \lim_{h\to 0^+} \frac{h(h^2 + 6h + 12)}{h} = 2\alpha \lim_{h\to 0^+} (h^2 + 6h + 12) = 24\alpha
\end{aligned}$$

οπότε, από την (3), λαμβάνουμε:

$$8 = 24\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στη (2) προκύπτει: $\boxed{\beta = 1}$

ΘΕΜΑ 4

α) $\Theta(0) = 16 \Leftrightarrow \boxed{c = 16}$

β) Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας είναι:

$\Theta'(t) = (-t^3 + 9t^2 - 10t + 16)' = -3t^2 + 18t - 10$

οπότε, $\Theta'(4) = -3.16 + 18.4 - 10 \Longrightarrow \boxed{\Theta'(4) = 14}$

γ) Θέλουμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\Theta'(t)$, με $0 \le t \le 8$. Ως πρός αυτό θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης $\Theta''(t)$. Είναι:

$\Theta''(t) = (-3t^2 + 18t - 10)' = -6t + 18 = -6(t-3)$

Είναι: $\Theta''(t) = 0 \Leftrightarrow -6(t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Επίσης, $\Theta''(t) > 0 \Leftrightarrow -6(t-3) > 0 \Leftrightarrow t - 3 < 0 \Leftrightarrow t < 3$, και $\Theta''(t) < 0 \Leftrightarrow$
$-6(t-3) < 0 \Leftrightarrow t > 3$

Επομένως, η $\Theta'(t)$ είναι: γνησίως αύξουσα στο [0,3] και γνησίως φθίνουσα στο [3,8], οπότε παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο $x = 3$. Άρα η τρίτη ώρα είναι αυτή η οποία παρουσιάζει το μέγιστο ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας.