

## Συναρτήσεις—Όρια για τα Μαθηματικά του β' κύκλου των Τ.Ε.Ε

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπο:

α)  $f(x) = \frac{1 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$

β)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

γ)  $f(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{2 - \sqrt{x}}$

δ)  $f(x) = \frac{3x + 2}{x^2 + 3x + 10}$

ε)  $f(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{x - 3}}$

στ)  $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{x^2 - 4}$

2. Δίνετε η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x^2 - 4}$$

Να εξετάσετε αν έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων:

α)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

β)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

δ)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ε)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3. Δίνετε η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & , x \leq -1 \\ -x^2 + 4 & , x > -1 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

4. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $1, 2 \cup 2, 3$  με  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lambda^4 + 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 12\lambda^2 - 26$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να ελέγξετε αν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  και αν υπάρχει να το προσδιορίσετε.

5. Να βρεθεί ο  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \lambda x^2 & , x > 1 \\ x + 1 & , x \leq 1 \end{cases}$$

να έχει όριο στο  $x_0 = 1$

6. Να βρείτε τις τιμές των ορίων:

α)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{x^2 - 16}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2}$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{5 - \sqrt{5x}}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{4-x} - 2}$$

7. Να βρεθεί, αν υπάρχει, η τιμή καθενός από τα επόμενα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+5| + 3|x-4| - 17}{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 6x + 8|}{x - 2}$$

8. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & , x \in [0, 2] \\ x^2 + 1 & , x \in (2, 3] \\ 2\alpha x - 3\beta & , x \in (3, 4] \end{cases}$$

να έχει όριο στα σημεία  $x_1 = 2$  και  $x_2 = 3$ .

9. Δίνετε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1 \\ \frac{x^2 + \lambda x - 1}{x + 1} & , x > 1 \end{cases}$$

α) Να βρεθεί ο  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f$  να έχει όριο στο  $x_0 = 1$ .

**β)** Για την παραπάνω τιμή του  $\lambda$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ , όταν  $g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

**10.** Δίνετε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 2} & , x \in [0, 2] \\ \frac{9}{8}x + \frac{7}{4} & , x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

**α)** Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ .

**β)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ,  $x \neq 2$  έχει όριο στο  $x_0 = 2$ .