Λύσεις Μαθηματικών Ημερησίων και Εσπερινών Επαγγελματικών Λυκείων (Ομάδα Α΄) και
Ειδικοτητας Επαγγελματικών Λυκείων (Ομάδα Β΄), 2011

## ΘΕΜΑ Α

**Α1)** Θεωρία σχολικού βιβλίου.

**Α2)** α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

**Α3)**

α) $(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$

β) $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

γ) $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

❑

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.**

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \lim_{x\to 4^-} \frac{(x-3)(x-4)}{x-4} = \lim_{x\to 4^-}(x-3) = 4 - 3 \Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$$

**Β2.**

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}\left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3\right) = \lim_{x\to 4^+}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3 = \lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - 3 =$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} - 3 = \lim_{x\to 4^+}(\sqrt{x}+2) - 3 = (\sqrt{4}+2) - 3 \Rightarrow \lim_{x\to 4^+} f(x) = 1$$

**Β3.** Πρέπει:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 1 = 1 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$$

❑

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 7 + 12 + 15 + 16 = 40$$

$$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{7}{40},\ f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{12}{40},\ f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{15}{40},\ f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{6}{40}$$

| Ηλικίες [ , ) | Μέσο διαστήματος $K_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ | $K_i\nu_i$ | Αθροιστική Συχνότητα $N_i$ | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [25, 35) | 30 | 7 | 210 | 7 | 70/4 |
| [35, 45) | 40 | 12 | 480 | 19 | 120/4 |
| [45, 55) | 50 | 15 | 750 | 34 | 150/4 |
| [55, 65) | 60 | 6 | 360 | 40 | 60/4 |
| Σύνολα | | 40 | 1800 | | 100 |

**Γ2.**

$$\overline{K} = \frac{\nu_1 K_1 + \nu_2 K_2 + \nu_3 K_3 + \nu_4 K_4}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4} = \frac{1800}{40} \Rightarrow \overline{K} = 45$$

**Γ3.** $15 + 6 = 21$ εργαζόμενοι.

**Γ4.** $\frac{70}{4}\%$.

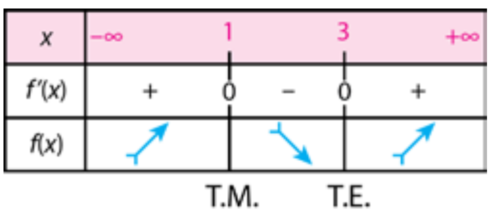
❑

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Η $f$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και είναι παντού παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)' = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$$

Για το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχουμε $\Delta = 16 - 12 = 4$, οπότε ρίζες $x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 3{,}1$. Επομένως για $1 < x < 3$ είναι $f'(x) < 0$, ενώ για $x < 1$ και $x > 3$ είναι $f'(x) > 0$. Άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$ και στο $(3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1,3)$.




**Δ2.** Από τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας προκύπτει ότι η $f$ παρουσιάζει:

❖Τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ με τιμή $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$
❖Τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$ με τιμή $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$

**Δ3.**

$$I=\int_1^3 f'(x)dx=f(x)|_1^3=f(3)-f(1)=1-5=-4$$

**Δ4.** Το ζητούμενο εμβδόν είναι:

$$E=\int_0^3 |g(x)|dx \quad (1)$$

Από το ερώτημα Δ1 έχουμε ότι $g(x)=f'(x)<0$ όταν $1<x<3$, ενώ $g(x)=f'(x)>0$ όταν $x<1$. 'Αρα η (1) χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής γράφεται:

$$E=\int_0^3 |g(x)|dx=\int_0^1 |g(x)|dx+\int_1^3 |g(x)|dx=\int_0^1 g(x)dx-\int_1^3 g(x)dx=\int_0^1 f'(x)dx-I=$$

$$f(x)|_0^1-I=f(1)-f(0)-I=8\ \tau.\mu.$$