

3^η Σειρά Ασκήσεων (Παράγουςα –Γενικά Θέματα)

1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ με $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ να αποδειχθεί ότι:

$$a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 0$$

2) Να βρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων:

$$f(x) = \lambda e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = -\eta \mu \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = -\sigma \nu \nu(\lambda x + b), \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2007, a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{a}{x}, a \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{a}{\sqrt{x+b}}, a, b \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-a}, a \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}, a \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \eta \mu x + x \sigma \nu \nu x$$

$$f(x) = -\sigma \nu \nu x + x \eta \mu x$$

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)}{x} + 2x \ln x$$

$$f(x) = \varepsilon \varphi x$$

3) Για κάθε μια από τις συναρτήσεις του προηγούμενου θέματος να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Εν συνεχεία να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστοιχης παράγουσας. Να διαπιστώσετε ότι η συνάρτηση f και η αντίστοιχη της παράγουσα δεν ορίζονται υποχρεωτικά στο ίδιο σύνολο.

4) Να βρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων:

$$f(x) = xe^{x^2}$$

$$f(x) = \ln(\lambda x), \lambda > 0$$

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 + 1}$$

$$f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x)^3}$$

$$f(x) = \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x}}$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^3(4x + 2)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{2e^x + 1}$$

$$f(x) = x \sin x^2$$

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$f(x) = x \ln(x^2 + 1)$$

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

5) Έστω δυο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} . Αν ισχύουν:

$$f(a) = g(a)$$

$$f(x) + x \leq g(x) + a, \forall x \in \mathbb{R}$$

να δείξετε ότι $f'(a) = g'(a) - 1$.

6) Η ταχύτητα u ενός κινητού, συναρτήσει του χρόνου t , δίνεται από την εξίσωση:

$$u = 2t^2 - \frac{1}{2}t + 1, 0 \leq t \leq 10$$

όπου το t είναι σε sec και το u σε m/sec .

α) Να βρείτε τη θέση x του κινητού συναρτήσει του χρόνου με δεδομένο ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό βρισκόταν στη θέση $x = 0$

β) Να βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του κινητού

7) Ο ρυθμός παραγωγής ενός προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση:

$$y = 3000 \left(1 + \frac{100}{(t + 9)^2} \right)$$

όπου t ο χρόνος σε μήνες από την ημέρα που ξεκίνησε η παραγωγή του προϊόντος. Να βρείτε τον αριθμό των τεμαχίων του προϊόντος που θα έχουν παραχθεί μετά από 10 μήνες από την έναρξη παραγωγής του. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός παραγωγής του προϊόντος και πότε επιτυγχάνεται;

8) Ο ρυθμός αύξησης ενός πληθυσμού μικροβίων περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$N'(t) = \frac{\ln(t+1)}{t+1}, 0 \leq t \leq 200$$

όπου t ο χρόνος σε λεπτά και N το πλήθος των μικροβίων. Με δεδομένο ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ υπάρχουν 1 000 μικρόβια, να βρείτε το πλήθος των μικροβίων μετά από 100 λεπτά.

9) Να υπολογίσετε τα $a, b \in \mathbb{R}$ για τα οποία η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{e^x}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -1$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$. Εν συνεχεία να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου.

10) Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf'(x) = (x+1)f(x), \forall x \in (0, +\infty)$$

και $f(1) = e$.

11) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με:

$$f(x) = \ln(e^x + me^{-x})$$

με $m \in (0, +\infty)$.

α) Να δειχθεί ότι η f ορίζεται σε ολόκληρο το \mathbb{R}

β) Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα μοναδικό ακρότατο το οποίο και να προσδιοριστεί

12) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} a \ln x + m^2 x, & x \in [1, +\infty) \\ x^2 + u^2 x + a, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 1$ να αποδειχθεί ότι:

$$m^2 - u^2 = \frac{3}{2}$$

13) Δίνετε η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f''(x) + x^2(1 + f'(x)) = \ln x^2, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Αν η g παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}^*$, να δειχθεί ότι το ακρότατο αυτό είναι τοπικό μέγιστο.

14) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x \geq x + 1$, με $\alpha > 0$, να υπολογίσετε το α .

15) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$$

$$f(x) = \frac{x-6}{x-5}$$

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$f(x) = (x - 1)e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

16) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο

Άσκηση 1, 2, 3, 4, Σελ. 220

Άσκηση 4, Σελ. 221

Επιμέλεια Θεμάτων:
Γιάννης Γ. Ψυχογιός