

2^η Σειρά Ασκήσεων (Παράγωγοι – Ρυθμός Μεταβολής – Μονotonία)

1) Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - ax + 6 & , x \leq 1 \\ b\sqrt{x^2 + 3} & , x > 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της. Εν συνεχεία να δώσετε τον τύπο της f' .

2) Αν

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 3 & , x < 1 \\ 2 & , x = 1 \\ x^3 + \gamma x + 2 & , x > 1 \end{cases}$$

να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

3) Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 + ae^{x-1} & , x < 1 \\ bx + \frac{\ln x}{x} & , x \geq 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη.

4) Αν $f(x) = 5e^x + 1 + 2\ln x$, να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f'(x) - f(x) = \frac{2}{x} - 1 - 2\ln x$$

5) Το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι:

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 135x + 500$$

σε χιλιάδες δραχμές με $0 < x \leq 60$.

Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων είναι:

$$P(x) = -x^2 + 90x$$

σε χιλιάδες δραχμές. Να βρείτε την ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο καθώς και το ποιο είναι το μέγιστο κέρδος.

6) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x} + \frac{17}{4}$. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -1/2$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μονotonία της f .

7) Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x} & , 0 < x \neq 1 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x = 1 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι:

α) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

β) Είναι γνησίως φθίσουσα στο $(0,1)$

γ) $f'(1) = -\frac{1}{2}$

8) Δίνετε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)\ln x(x-2)}{3-x} & , 2 < x \neq 3 \\ 0 & , x = 2 \\ -1 & , x = 3 \end{cases}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια

β) Να βρείτε την $f'(3)$

γ) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2,3)$

9) Δίνετε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^\alpha - 1 - \alpha(x-1)}{x-1} & , x < 1 \\ 0 & , x = 1 \\ \frac{x-1-\ln x}{\ln x} & , x > 1 \end{cases}$$

α) Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

β) Να βρεθεί η $f'(x)$

10) Δίνετε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \ln e^{-x} + ax^2 + 1 & , x \leq 0 \\ e^{bx} & , x > 0 \end{cases}$$

με $a < 0$ και $b \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν τα a, b ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

β) Να βρεθεί η $f'(x)$

γ) Να μελετηθεί η f ως προς τα ακρότατα

11) Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$f(x) = (x^2 + 2)\sqrt{1 + x^2}$$

$$f(x) = \frac{(x^2 + 2)}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$f(x) = (3 + x^3)(4 + x^2)$$

$$f(x) = e^x + \ln x + x + 2$$

$$f(x) = \ln(x^2 - x)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$f(x) = x \ln(x^2 - x)$$

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$f(x) = \frac{\ln(x + 3)}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$$

$$f(x) = \frac{\eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}$$

$$f(x) = x\eta\mu \frac{1}{x}$$

12) Αν $f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$, τότε:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την $f'(x)$

γ) Να βρείτε την $f''(x)$

δ) Να δείξετε ότι: $4xf''(x) + 2f'(x) = f(x)$

13) Δίνετε η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2}$$

Να βρείτε τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

$$f'(0) + 2f(0) = 4$$

14) Αν $f(x) = \frac{x-3}{x-4}$, να αποδείξετε ότι: $2(f'(x))^2 = (f(x) - 1)f''(x)$

15) Αν $f(x) = e^{4x} + 2e^{-x}$ να αποδείξετε ότι: $f'''(x) - 13f'(x) - 12f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

16) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

17) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$ είναι γνησίως μονότονη

18) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης: $f(x) = 2x^2 - |x^2 - 4x|$

19) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1 & , x \leq 4 \\ x^3 - 27x + 37 & , x > 4 \end{cases}$$

20) Να βρείτε τις τιμές των a, b για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + ax + b, x \in \mathbb{R}^*$ παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = -1/2$ τοπικό ακρότατο το $3/4$. Για τις τιμές που βρήκατε να προσδιορίσετε τα κρίσιμα σημεία της f .

21) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2ax + 2a - 1$. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

22) Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε την παράγωγο της f .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δίνετε ότι:

$$x^2 \leq (1+x^2)\ln(1+x^2), x \in \mathbb{R}$$

Επιμέλεια Θεμάτων:
Γιάννης Γ. Ψυχολιός