Μαθηματικά Β΄ Κύκλου Ημερήσιων Τ.Ε.Ε[1]

ΘΕΜΑ 1

α. Είναι:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_6 = 25$$

$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{4}{25} = 0{,}16,\ f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{6}{25} = 0{,}24,\ f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{5}{25} = 0{,}2,\ f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{7}{25} = 0{,}28,\ f_5 = \frac{\nu_5}{\nu} = \frac{2}{25} = 0{,}08,$
$f_6 = \frac{\nu_6}{\nu} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

και συμπληρώνουμε τον πίνακα ως ακολούθως:

Πλήθος κλήσεων x_i	Πλήθος συνδρομητών ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα (%)	$x_i\nu_i$
2	4	0,16	4	16	8
3	6	0,24	10	40	18
4	5	0,2	15	60	20
5	7	0,28	22	88	35
6	2	0,08	24	96	12
7	1	0,04	25	100	7
Αθροίσματα	25	1,00			100

β. Είναι:

$$\bar{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_6 x_6}{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_6} = \frac{100}{25} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 4}$$

γ. Το πολύ 4 κλήσεις πραγματοποιούν οι συνδρομητές οι οποίοι πραγματοποιούν 2 ή 3 ή 4 κλήσεις, άρα $4 + 6 + 5 = 15$ συνδρομητές.

δ. Τουλάχιστον 5 κλήσεις σημαίνει 5 κλήσεις ή περισσότερες. Επομένως το ζητούμενο ποσοστό είναι: $0{,}28 + 0{,}08 + 0{,}04 = 0{,}4 = 40\%$.

❖

[1] Οι λύσεις που παρουσιάζονται είναι ενδεικτικές αλλά, όχι υποχρεωτικά και μοναδικές

ΘΕΜΑ 2

α.

$$\lim_{x\to6^+} f(x) = \lim_{x\to6^+} \frac{x^2-8x+12}{x-6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to6^+} \frac{(x-6)(x-2)}{x-6} = \lim_{x\to6^+}(x-2) = 6-2 = 4$$

β. Είναι:

$$\lim_{x\to6^-} f(x) = \lim_{x\to6^-} e^{x-6}(2x-\mu) = e^0(2\cdot6-\mu) = 12-\mu$$

γ. Το ζητούμενο όριο υπάρχει, αν και μόνο αν:

$$\lim_{x\to6^+} f(x) = \lim_{x\to6^-} f(x) \Leftrightarrow 12-\mu = 4 \Leftrightarrow \boxed{\mu = 8}$$

και ισούται με:

$$\lim_{x\to6} f(x) = \lim_{x\to6^+} f(x) = \lim_{x\to6^-} f(x) \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to6} f(x) = 4}$$

δ. Η f θα είναι συνεχής στο 6, αν και μόνο αν:

$$\lim_{x\to6} f(x) = f(6) \Leftrightarrow 4 = 3\lambda-5 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 3}$$

❖

ΘΕΜΑ 3

α. Είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{x-2}{e^x}\right)' = \frac{(x-2)'e^x-(x-2)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x-(x-2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x[1-(x-2)]}{(e^x)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x+3}{e^x}, x\in\mathbb{R}}$$

β. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{e^x} > 0 \overset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} -x+3 > 0 \Leftrightarrow -x > -3 \Leftrightarrow x < 3$$

www.jpsihogios.gr

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{e^x} < 0 \overset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} -x+3<0 \Leftrightarrow -x<-3 \Leftrightarrow x>3$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f'		+	0	-	
f		↗		↘	

Ολικό μέγιστο

Άρα:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 3]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$.

γ. Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών της f έπεται ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=3$, το οποίο ισούται με $f(3) = \frac{1}{e^3}$.

❖

ΘΕΜΑ 4

α. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0,-5)$ θα έχουμε:

$$f(0) = -5 \Leftrightarrow -2-\lambda = -5 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 3}$$

οπότε ο τύπος της f γίνετε:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 3x + 1, x \in \mathbb{R}$$

Η f είναι παντού παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική συνάρτηση) με:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 3x + 1\right)' = \frac{1}{3}3x^2 - 2kx + 3 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2kx + 3, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x=1$, στο οποίο είναι παραγωγίσιμη θα είναι:

$$f'(1) = 0 \quad (2)$$

Από την (1) για x=1 έχουμε: $f'(1) = 1 - 2k + 3 \Rightarrow f'(1) = -2k + 4 \quad (3)$.

Από τις (2) και (3):

$$-2k + 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = 2}$$

β. Για $k=2$ και $\lambda = 3$ ο τύπος της f γίνετε:

w w w . j p s i h o g i o s . g r

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1, x \in \mathbb{R}$$

με παράγωγο:

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3, x \in \mathbb{R}$$

i. Θα βρούμε τα στάσιμα σημεία της f. Θέτουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου θα είναι:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 3$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

Επομένως, ο πίνακας μεταβολών της f έχει ως εξής:

	-∞		1		3		+∞
f'		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	
			Τοπικό μέγιστο		Τοπικό ελάχιστο		

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,3]$.

ii Στο $x = 1$ έχουμε τοπικό μέγιστο με τιμή $f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \frac{7}{3}$.

Στο $x = 3$ έχουμε τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(3) = 9 - 18 + 9 + 1 = 1$.

❖

www.jpsihogios.gr