ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ Τ.Ε.Ε

ΘΕΜΑ 1

α.

$$\bar{x} = \frac{8 + 14 + 20 + 12 + 16}{5} \Rightarrow \bar{x} = 14$$

β. Διατάσουμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά:

$$8, 12, 14, 16, 20$$

και επειδή το πλήθος τους είναι περιττός, έχουμε ότι η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή:

$$\delta = 14$$

γ. Είναι:

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2}{5}} =$$

$$\sqrt{\frac{(8 - 14)^2 + (14 - 14)^2 + (20 - 14)^2 + (12 - 14)^2 + (16 - 14)^2}{5}} =$$

$$\sqrt{\frac{36 + 0 + 36 + 4 + 4}{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} \Rightarrow s = 4$$

δ. Το εύρος είναι: $R = 20 - 8 \Rightarrow R = 12$

ε. Είναι:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \cong 29\% > 10\%$$

και επομένως το δείγμα είναι μη ομοιογενές.

■

ΘΕΜΑ 2

α. Είναι:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{\lambda(x - 1)} = \frac{1}{\lambda} \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{\lambda} \lim_{x \to 1^-} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} =$$

$$\frac{1}{\lambda}\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{\lambda}\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2\lambda}$$

β. Είναι:

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{3x-1}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$$

γ. Πρέπει και αρκεί να είναι:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\Leftrightarrow\frac{1}{2\lambda}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \lambda=1$$

■

ΘΕΜΑ 3

α. Είναι:

$$f'(x)=\left(e^{\lambda x}\right)'=(\lambda x)'e^{\lambda x}=\lambda e^{\lambda x}$$

και

$$f''(x)=\left(\lambda e^{\lambda x}\right)'=\lambda(\lambda x)'e^{\lambda x}=\lambda^2e^{\lambda x}$$

β. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f''(x)-f'(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow\lambda^2e^{\lambda x}-\lambda e^{\lambda x}-2e^{\lambda x}=0\Leftrightarrow(\lambda^2-\lambda-2)e^{\lambda x}=0\xLeftrightarrow{e^{\lambda x}\neq 0}$$

$$\lambda^2-\lambda-2=0\Leftrightarrow \lambda=-1,\lambda=2$$

γ.

i) Για $\lambda=2$, έχουμε $f(x)=e^{2x}$, οπότε $f'(x)=2e^{2x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Για $\lambda=-1$, έχουμε $f(x)=e^{-x}$, οπότε $f'(x)=-e^{-x}<0,\forall x\in\mathbb{R}$ και συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

■

ΘΕΜΑ 4

α. Είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2008\right)'=x^2-4x+3$$

β. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι: $\Delta = 16 - 12 = 4$, οπότε έχουμε δυο ρίζες που είναι:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα μονοτονίας της f:

	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα:

- Η f είναι γνήσια αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(3, +\infty)$.
- Η f είναι γνήσια φθίνουσα στο διαστήμα $(1,3)$
- Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 1$, το οποίο ισούται με $f(1)$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$ το οποίο ισούται με $f(3) = 2008$.

γ. Επειδή το τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$ είναι και ολικό ελάχιστο της f, έχουμε σύμφωνα με τον ορισμό του ολικού ελαχίστου ότι:

$$f(x) \geq f(3), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \geq 2008, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \geq 2008, \forall x \in [1, +\infty)$$