Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης[1]

ΘΕΜΑ 1

Α. Σχολικό βιβλίο Σελ. 251.

Β. Σχολικό βιβλίο Σελ. 213.

Γ.

α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος

❖

ΘΕΜΑ 2

Α.

α. Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\lambda+1 \\ y &= 2\lambda-1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2\lambda+1 \\ -y &= -2\lambda+1 \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} x-y=2 \Leftrightarrow \boxed{y=x-2}$$

η οποία είναι η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας

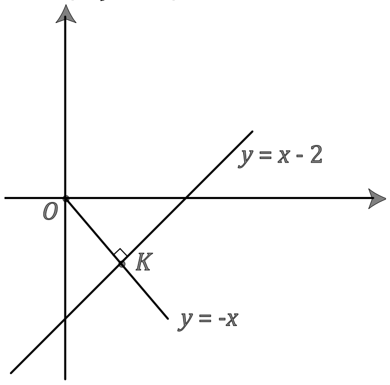
β. Είναι:

$$|z| = \sqrt{(2\lambda+1)^2+(2\lambda-1)^2} = \sqrt{8\lambda^2+2}$$

[1] Οι λύσεις που παρουσιάζονται είναι ενδεικτικές αλλά, όχι υποχρεωτικά και μοναδικές

το οποίο γίνετε ελάχιστο για $\lambda = 0$, δηλαδή για τον μιγαδικό $\boxed{z_0 = 1 - i}$.

<u>Άλλος τρόπος</u>



Γεωμετρικά, ως το σημείο K που είναι η τομή των ευθειών $y = x - 2$ και $y = -x$. Όλος περιέργως αυτός είναι ο μοναδικός τρόπος λύσης που συνάντησα διαβάζοντας δεκάδες λύσεις από διάφορα φροντιστήρια!!!

Η λύση που προτείνω παραπάνω θεωρώ πως είναι πολύ απλούστερη. Άλλωστε δε καταλαβαίνω γιατί πρέπει να επιστρατεύσουμε γεωμετρική προσέγγιση για ένα τόσο απλό ερώτημα, εκτός αν πλέον ο εγκλωβισμός της σκέψης μας έχει φτάσει σε τέτοιο επίπεδο που έχει «πακετάρει» ότι όταν στους μιγαδικούς βλέπουμε στην εκφώνηση να λέει «μέγιστο» (ή «ελάχιστο») πάμε με κλειστά μάτια για γεωμετρική λύση…

Β. Θέτουμε $w = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 13) - (\beta - 1)i = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 13 = 0 \\ \beta - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha - 12 = 0 \\ \beta = 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha = 3, -4 \\ \beta = 1 \end{aligned}\right\}$$

οπότε οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι οι: $\boxed{3 + i}$ και $\boxed{-4 + i}$.

❖

ΘΕΜΑ 3

Α. Για κάθε $x > -1$ έχουμε:

$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$$

δηλαδή η f παρουσιάζει στο $x = 0$ ολικό ελάχιστο. Επειδή το 0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f και η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 ισχύει το θεώρημα του Fermat, οπότε:

$$f'(0) = 0 \quad (1)$$

Αλλά είναι:

$$f'(x) = \alpha^x ln\alpha - \frac{1}{x+1}, x > -1 \quad (2)$$

w w w . j p s i h o g i o s . g r

από την οποία για $x = 0$, έχουμε $f'(0) = ln\alpha - 1$ (3). Από τις (1) και (3) προκύπτει:

$$ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = e}$$

Β.

α. Ο τύπος της f γίνετε: $f(x) = e^x - \ln(x+1)$. Τότε:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}, x > -1$$

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}, x > -1 \quad (4)$$

Προφανώς για κάθε $x > -1$ είναι $e^x > 0$ και $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$, οπότε από την (4) έπεται ότι:

$$\boxed{f''(x) > 0, \forall x > -1}$$

Επομένως η f είναι κυρτή.

β. Από το προηγούμενο ερώτημα έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$. Επομένως:

- Για $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(-1) < f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$.

- Για $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

γ. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, οπότε:

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 1, \forall x > -1 \quad (5)$$

Ισοδύναμα ως προς την αποδεικτέα:

$$\frac{(f(\beta)-1)(x-2) + (f(\gamma)-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow (f(\beta)-1)(x-2) + (f(\gamma)-1)(x-1) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: [1,2] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = (f(\beta)-1)(x-2) + (f(\gamma)-1)(x-1)$. Είναι:

- $h(1) = 1 - f(\beta) < 0$, λόγω της (5) και του ότι $\beta \neq 0$

- $h(2) = f(\gamma) - 1 > 0$, λόγω της (5) και του ότι $\gamma \neq 0$

Άρα $h(1)h(2) < 0$, οπότε η h πληροί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,2]$ και συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζας της εξίσωσης $h(x) = 0$ στο $(1,2)$.

<u>Άλλος τρόπος</u>

w w w . j p s i h o g i o s . g r

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H:(1,2)\to\mathbb{R}$ με $H(x)=\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}$, η οποία είναι συνεχής στο (1,2) και:

- $\lim_{x\to1^+}H(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\lim_{x\to1^+}\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=+\infty$, διότι $\lim_{x\to1^+}(x-1)>0$
- $\lim_{x\to2^-}H(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\lim_{x\to2^-}\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=-\infty$, διότι $\lim_{x\to2^-}(x-2)<0$

Λόγω συνέχειας της H στο (1,2) έπεται ότι υπάρχουν $\kappa,\lambda\in(0,1)$ με $\kappa<\lambda$ τέτοια ώστε: $f(\kappa)>0$ και $f(\lambda)<0$. Τότε από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει το ζητούμενο.

<u>Άλλος τρόπος</u>
Είναι:

$$H'(x)=\left(\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}\right)'=-\frac{f(\beta)-1}{(x-1)^2}-\frac{f(\gamma)-1}{(x-2)^2}<0,\forall x\in(1,2)$$

οπότε η H είναι γνησίως φθίνουσα στο (1,2) και το σύνολο τιμών της είναι το:

$$\left(\lim_{x\to2^-}H(x),\lim_{x\to1^+}H(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

το οποίο περιέχει το 0.

❖

ΘΕΜΑ 4

Α.

α. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to0^+}G(x)=G(0)\quad(1)$$

Είναι:

$$G(0)=6\lim_{t\to0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=6\lim_{t\to0}\frac{\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\lim_{t\to0}\frac{1-(1-t^2)}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=$$

$$6\lim_{t\to0}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}=6\frac{1}{1+1}\Rightarrow\boxed{G(0)=3}\quad(2)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}G(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{H(x)}{x}-\lim_{x\to0^+}\int_0^x f(t)dt+3\quad(3)$$

αλλά:

w w w . j p s i h o g i o s . g r

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}xf(x)=0$$

και:

$$\lim_{x\to 0^+}\int_0^x f(t)dt=0$$

οπότε από την (3) έχουμε: $\boxed{\lim_{x\to 0^+}G(x)=3}$ (4).

Από τις (2) και (4) έπεται η (1).

β. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ έπεται ότι η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ και η συνάρτηση $H(x)=\int_0^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$. Επομένως η συνάρτηση $\frac{H(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$. Τότε όμως και η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων, ισχύει δε ότι:

$$G'(x)=\left(\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3\right)'=\left(\frac{H(x)}{x}\right)'-f(x)=\frac{H'(x)x-H(x)(x)'}{x^2}-f(x)$$
$$=\frac{H'(x)x-H(x)}{x^2}-f(x),x\in(0,2)$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι: $H'(x)=\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'=xf(x),x\in(0,2)$ η παραπάνω ισότητα δίνει:

$$\boxed{G'(x)=-\frac{H(x)}{x^2},x\in(0,2)}$$

γ. Ήδη από το ερώτημα α) έχουμε: $G(0)=3$ (5).

Αλλά είναι: $G(2)=\frac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=\frac{1}{2}\int_0^2 tf(t)dt-\int_0^2 f(t)dt+3$ (6).

Εξ' υποθέσεως είναι:

$$\int_0^2(t-2)f(t)dt=0\Leftrightarrow\int_0^2 tf(t)dt-2\int_0^2 tf(t)dt=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int_0^2 tf(t)dt=\int_0^2 tf(t)dt$$

οπότε η (6) δίνει: $G(2)=3$ (7). Από τις (5) και (7) έχουμε $G(0)=G(2)$ και επομένως η G πληροί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[0,2]$, επομένως θα υπάρχει $\alpha\in(0,2)$ τέτοιο ώστε:

$$G'(\alpha)=0\Leftrightarrow-\frac{H(\alpha)}{\alpha^2}=0\Leftrightarrow\boxed{H(\alpha)=0}$$

δ. Η αποδεικτέα γράφετε ισοδύναμα:

$$\alpha H(\xi)=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt\Leftrightarrow\frac{H(\xi)}{\xi^2}=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)dt\Leftrightarrow-G'(\xi)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)dt\Leftrightarrow$$

w w w . j p s i h o g i o s . g r

$$G'(\xi)+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)dt=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $J:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$J(x)=G(x)+\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)dt\right)x$$

Είναι:

$$J(0)=G(0)+0=3$$

$$J(\alpha)=G(\alpha)+\int_0^\alpha f(t)dt=\left(\frac{H(\alpha)}{\alpha}-\int_0^\alpha f(t)dt+3\right)+\int_0^\alpha f(t)dt\xRightarrow{H(\alpha)=0}J(\alpha)=3$$

Άρα $J(\alpha)=J(0)$ και η J πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[0,\alpha]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε:

$$J'(\xi)=0\Leftrightarrow G(\xi)+\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)dt\right)\xi=0$$

<u>Άλλος τρόπος</u>

Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ (του διαφορικού λογισμού) στην G στο διάστημα $[0,\alpha]$.

Ομοίως με το σχόλιο του Θέματος 2, και στο ερώτημα αυτό υπάρχει πλήρης ομοφωνία των λύσεων που προτείνονται με βάση το ΘΜΤ!!! Εγώ αποτελώ τον «αντιφρονούντα» (ή/και γραφικό ίσως) που δίνω λύση μέσω του θεωρήματος Rolle…

❖

Επιμέλεια:
Γιάννης Γ. Ψυχογιός

www.jpsihogios.gr