Εισαγωγικες Εξετασεις 2008

Λυσεις[*] Θεματων Μαθηματικων Θετικης & Τεχνολογικης Κατευθυνσης

ΘΕΜΑ 1

Α.1 Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α.2 Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Β.

α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ 2

α)

Α' τρόπος

Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\left|\left(i + 2\sqrt{2}\right)z\right| = 6 \Leftrightarrow \left|\left(i + 2\sqrt{2}\right)(x + yi)\right| = 6 \Leftrightarrow \left|xi - y + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}yi\right| = 6 \Leftrightarrow$$

$$\left|\left(2\sqrt{2}x - y\right) + \left(2\sqrt{2}y + x\right)i\right| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{\left(2\sqrt{2}x - y\right)^2 + \left(2\sqrt{2}y + x\right)^2} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\left(2\sqrt{2}x - y\right)^2 + \left(2\sqrt{2}y + x\right)^2 = 36 \Leftrightarrow 8x^2 - 4\sqrt{2}xy + y^2 + 8y^2 + 4\sqrt{2}xy + x^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Επομένως ο ζητούμενος τόπος είναι κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 2.

Β' τρόπος

$$\left|\left(i + 2\sqrt{2}\right)z\right| = 6 \Leftrightarrow \left|i + 2\sqrt{2}\right||z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 8}|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 4$$

β) Έστω $w = a + bi$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)| \Leftrightarrow |a + bi - 1 + i| = |a + bi - 3 + 3i| \Leftrightarrow$$

[*] Πρόκειται για ενδεικτικές λύσεις. Ενδεχομένως οι λύσεις που προτείνονται να μην είναι μοναδικές.

$$|(a-1)+(b+1)i| = |(a-3)+(b+3)i| \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2} = \sqrt{(a-3)^2+(b+3)^2} \Leftrightarrow$$

$$(a-1)^2+(b+1)^2 = (a-3)^2+(b+3)^2 \Leftrightarrow$$

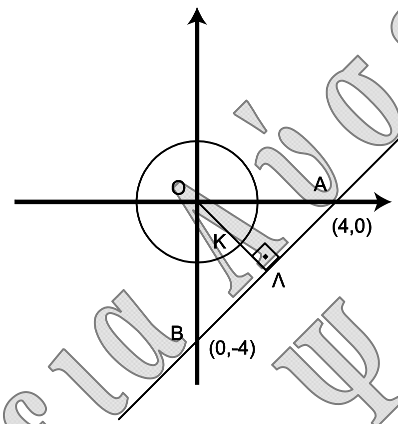
$$a^2-2a+1+b^2+2b+1 = a^2-6a+9+b^2+6b+9 \Leftrightarrow -2a+2b+2 = -6a+6b+18 \Leftrightarrow$$

$$a-b-4=0$$

Επομένως ο ζητουνενος τόπος είναι ευθεία γραμμή.

γ) Επειδή το $|w|$ εκφράζει το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $OΛ$ (βλέπε σχήμα) έχουμε ότι αυτό γίνετε ελάχιστο όταν $OΛ \perp AB$. Τότε είναι:

$$|w|_{min} = (OΛ) = \frac{|1\cdot 0 - 1\cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow |w|_{min} = 2\sqrt{2}$$



δ) Επειδή το $|z-w|$ εκφράζει το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $KΛ$ (βλέπε σχήμα) έχουμε ότι αυτό γίνετε ελάχιστο όταν $OΛ \perp AB$. Τότε είναι:

$$|z-w|_{min} = (KΛ) = (OΛ)-(OK) = 2\sqrt{2}-2 \Rightarrow |z-w|_{min} = 2(\sqrt{2}-1)$$

ΘΕΜΑ 3

α) Είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xlnx = (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(lnx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$-\lim_{x\to 0^+} x = 0 = f(0)$$

και επομένως η f είναι συνεχής στο $x=0$.

β) Για $x \in (0,+\infty)$, έχουμε:

$$f'(x) = (xlnx)' = lnx+1$$

οπότε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow lnx = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow lnx + 1 > 0 \Leftrightarrow lnx > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow lnx + 1 < 0 \Leftrightarrow lnx < -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$$

Ώστε, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \frac{1}{e})$ και γνησίως αύξουσα στο $(\frac{1}{e}, +\infty)$. Συνεπώς:

$$\left[0, \frac{1}{e}\right] \xrightarrow{f} \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$$

$$\left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \xrightarrow{f} \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

αφού $lim_{x\to+\infty} f(x) = lim_{x\to+\infty} xlnx = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$, αφού $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) \supset \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$.

γ) Προφανώς, είναι $x > 0$, οπότε έχουμε ισοδύναμα:

$$x = e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow lnx = \frac{a}{x} \Leftrightarrow xlnx - a = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $g(x) = xlnx - a = f(x) - a$, η οποία (λόγω του ερωτήματος β) θα έχει σύνολο τιμών το $\left[-\frac{1}{e} - a, +\infty\right)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

■ Άν $-\frac{1}{e} - a > 0 \Leftrightarrow a < -\frac{1}{e}$, τότε η g είναι αυστηρά θετική και επομένως η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν έχει ρίζα.

■ Άν $-\frac{1}{e} - a < 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{e}$, τότε η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα, αφού το σύνολο τιμών της εμπεριέχει το 0. Αλλά:

$$g'(x) = (f(x) - a)' = f'(x)$$

και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \frac{1}{e})$ και γνησίως αύξουσα στο $(\frac{1}{e}, +\infty)$. Συνεπώς η εξίσωση $g(x) = 0$ θα έχει το πολύ δυο ρίζες (το πολύ μια στο $(0, \frac{1}{e})$ και το πολύ μια στο $(\frac{1}{e}, +\infty)$).

➲ Στο διάστημα $(0, \frac{1}{e})$, έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) - a = -a$$

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} - a < 0$$

Αν $-a < 0 \Leftrightarrow a > 0$, τότε δεν έχουμε ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

Αν $-a > 0 \Leftrightarrow a < 0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano έχουμε μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, η οποία είναι και μοναδική.

➲ Στο διάστημα $(\frac{1}{e}, +\infty)$, έχουμε:

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} - a < 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - a = +\infty > 0$$

και σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano έχουμε τουλάχιστον μια ρίζα, η οποία είναι και μοναδική.

Συνάγουμε λοιπόν ότι:

$\left\{a > -\frac{1}{e} \wedge a > 0\right\} \Leftrightarrow a > 0$, μια ρίζα

$\left\{a > -\frac{1}{e} \wedge a < 0\right\} \Leftrightarrow -\frac{1}{e} < a < 0$, δυο ρίζες

■ Αν $\alpha = 0$, τότε $g(x) = 0 \Leftrightarrow xlnx = 0 \Leftrightarrow x = 1$, δηλαδή έχουμε μοναδική ρίζα.

■ Άν $-\frac{1}{e} - a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{e}$, τότε η $g(x) = 0$ έχει προφανή λύση την $\frac{1}{e}$. Για $x > \frac{1}{e} \Rightarrow g(x) > g\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow g(x) > 0$, ενώ για $x < \frac{1}{e} \Rightarrow g(x) > g\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow g(x) > 0$. Άρα, εν τοιαύτη περιπτώσει η $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση.

δ)

<u>*Α' τρόπος*</u>
Έχουμε:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow ln(x+1) + 1 > (x+1)ln(x+1) - xlnx \Leftrightarrow$$

$$-xln(x+1) + xlnx + 1 > 0 \Leftrightarrow -x(ln(x+1) - lnx) + 1 > 0 \Leftrightarrow -xln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 1 > 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $h(x) = ln(1+x) - x$, για την οποία:

$$h'(x) = (ln(1+x) - x)' = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x} < 0, \forall x > 0$$

Επομένως η h είναι γνήσια φθίνουσα και για:

$$x > 0 \Rightarrow h(x) < h(0) \Rightarrow h(x) < 0 \Rightarrow ln(1+x) - x < 0, \forall x > 0$$

και θέτωντας όπου x το $\frac{1}{x}$, από την τελευταία ανισότητα προκύπτει $ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0, \forall x > 0$ και επομένως η (1) ισχύει.

<u>*Β' τρόπος*</u>
Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ (του διαφορικού λογισμού) στην f στο διάστημα $[x, x+1]$.

ΘΕΜΑ 4

α) Ολοκληρώνωντας στο [0,2] τα μέλη της δοσμένης σχέσης λαμβάνουμε:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left[(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt - 45\right]dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 f(t)dt \int_0^2 (10x^3+3x)dx - \int_0^2 45dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 f(t)dt \left[\frac{10}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^2 - 45[x]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x)dx = 46\int_0^2 f(t)dt - 90 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 2$$

Και αντικαθιστώντας την τιμή του ολοκληρώματος στη δοσμένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

β) Έστω τυχόν $x \in \mathbb{R}$. Τότε στο όριο $lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}$ θέτουμε $x = u - h$, οπότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(u)-g'(u-h)}{h} = g''(u)$$

και αντικαθιστώνας το u με το x λαμβάνουμε:

$$g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

γ)

i. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = \left(\frac{0}{0}\right)(*) = \lim_{h\to 0}\frac{\big(g(x+h)-2g(x)+g(x-h)\big)'}{(h^2)'} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right] =$$

$$\frac{1}{2}(g''(x)+g''(x)) = g''(x)$$

(*)Προσοχή: η παραγώγιση γίνετε ως πρός το h, ενω το x παίζει ρόλο σταθεράς

Αντικαθιστώντας το αριστερό μέλος της δοσμένης, έχουμε:

$$g''(x) = f(x) + 45 \Rightarrow g''(x) = 20x^3 + 6x \Rightarrow \big(g'(x)\big)' = (5x^4+3x^2)' \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1 \Rightarrow$$

$$g'(x) = (x^5 + x^3 + c_1x)' \Rightarrow g(x) = x^5 + x^3 + c_1x + c_2, x \in \mathbb{R}$$

και c_1, c_2 πραγματικές σταθερές, τις οποίες υπολογίζουμε ως εξής:

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

Ώστε:

$$g(x) = x^5 + x^3 + x + 1, x \in \mathbb{R}$$

ii. Η g είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνιμική, με:

$$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Επομένως είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και «1-1».

Σχολιασμός των Θεμάτων

Κατά τη γνώμη μας:

1. Το θέμα 2 είναι στοιχειώδες θέμα γεωμετρικών τόπων. Στο ερωτήματα γ) μπορεί να υπήρξε πρόβλημα για κάποιους υποψηφίους γιατί έπρεπε να ανακαλέσουν από τη μνήμη τους το τύπο υπολογισμού της απόστασης σημείου από ευθεία..

2. Στα θέματα 3 τα ερωτήματα α), β) και δ) είναι βατά. Τουναντίον το ερώτημα γ) είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο και λίγοι υποψήφιου θα το έχουν απαντήσει πλήρως. Θεωρούμε ότι το συγκεκριμένο ερώτημα είναι ατυχές και πολλά παιδιά θα έχασαν μεγάλο μέρος του χρόνου τους, για μονάδες οι οποίες δεν ανταποκρίνονται στην δυσκολία του ερωτήματος.

3. Στο θέμα 4 η κατασκευή του τύπου της $f(x)$ αποτελεί εξαιρετική έμπνευση. Το όλο ζήτημα αντιμετωπιζόταν αν ο υποψήφιος παρατηρούσε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(t)dt$, είναι αριθμός. Στο ερώτημα β) απαιτείται στοιχειώδης αλλαγή μεταβλητής στο δοσμένο όριο. Το ερώτημα γ) απαιτεί ποσοχή (λόγω του ότι δε δίνετε ότι η g'' είναι συνεχής). Σίγουρα απευθύνεται σε όσους μαθητές το... κατέχουν το... σπόρ (για να κάνουμε και λίγο χιούμορ). Το ερώτημα γ) δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο, όσο αφορα το i., ενώ το ii. είναι.. δωράκι.

Γιάννης Γ. Ψυχογιός