

ΛΥΣΕΙΣ ΕΤΟΥΣ 2007

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

A1) Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A2) Θεωρία σχολικού βιβλίου.

A3) Θεωρία σχολικού βιβλίου.

B)

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

α) Έστω  $z = x + yi$ . Τότε:

$$z = \frac{2 + ai}{a + 2i} \Leftrightarrow x + yi = \frac{2 + ai}{a + 2i} \Leftrightarrow (x + yi)(a + 2i) = 2 + ai \Leftrightarrow$$

$$ax + 2xi + ayi - 2y = 2 + ai \Leftrightarrow (ax - 2y) + (2x + ay)i = 2 + ai \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ax - 2y = 2 \\ 2x + ay = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (ax - 2y)^2 = 4 \\ (2x + ay)^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2x^2 - 4axy + 4y^2 = 4 \\ 4x^2 + 4axy + a^2y^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(a^2 + 4)x^2 + (a^2 + 4)y^2 = a^2 + 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

οπότε η εικόνα του  $z$  ανήκει σε κύκλο κέντρου  $O(0,0)$  και ακτίνας  $\rho = 1$ .

β)

i) Για  $\alpha = 0$  και  $\alpha = 2$ , έχουμε αντίστοιχα:

$$z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{i}{i^2} = -i$$

$$z_2 = \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = 1$$

$$\text{οπότε, } |z_1 - z_2| = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{ii) } (z_1)^{2\nu} = (z_1)^{2\nu} \Leftrightarrow (-i)^{2\nu} = (-1)^\nu \Leftrightarrow [(-1)^2(i)^2]^\nu = (-1)^\nu \Leftrightarrow (-1)^\nu = (-1)^\nu$$

η οποία ισχύει.

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

α) Η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1), x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } f''(x) = 6x, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

και  $f''(1) = 6 > 0$ , άρα η  $f$  παρουσιάζει στο  $x = 1$  τοπικό ελάχιστο

ενώ  $f''(-1) = -6 < 0$ , άρα η  $f$  παρουσιάζει στο  $x = -1$  τοπικό μέγιστο

Ώστε, η  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

Είναι:  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , με  $f''(x) < 0$ , για  $x < 0$  και  $f''(x) > 0$  για  $x > 0$ .

Ώστε, η  $f$  παρουσιάζει ένα σημείο καμπής στο  $x = 0$ .

β) Επειδή  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , και η  $f$  είναι συνεχής υπάρχει  $x_0$  κοντά στο  $-\infty$ , τέτοιο ώστε  $f(x_0) < 0$ . Επιπλέον είναι  $f(-1) = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) > 0$ , διότι  $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . Επομένως η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και επομένως η  $f(x) = 0$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $[x_0, -1]$ . Επιπλέον επειδή η  $f$  είναι γνήσια μονότονη στο διάστημα αυτό η ρίζα είναι μοναδική.

Ομοίως δείχνουμε ότι η  $f$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(-1, 1)$  και στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .

Ώστε, η  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο  $\mathbb{R}$ .

γ) Είναι  $A = (x_1, f(x_1)) = (1, f(1)) = (-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$ ,  $B = (x_2, f(x_2)) = (-1, f(-1)) = (1, -2 - \eta\mu^2\theta)$  και  $\Gamma = (x_3, f(x_3)) = (0, f(0)) = (0, -2\eta\mu^2\theta)$ . Οι συντεταγμένες των  $A, B, \Gamma$  επαληθεύουν την  $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ , άρα τα  $A, B, \Gamma$  βρίσκονται επάνω στη δοσμένη ευθεία.

δ) Αν  $g(x) = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ , τότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx = \int_{-1}^0 |x^3 - x| dx + \int_0^1 |x^3 - x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx = \frac{1}{2} \mu. \epsilon. \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

α) Αφού οι  $f, g$  είναι συνεχείς, έχουμε ότι η  $F$  είναι παραγωγίσιμη, με:

$$F'(x) = f(x)g(x), x \in [0,1]$$

Αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0,1]$ , έχουμε ότι για  $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$ . Επιπλέον για κάθε  $x \in [0,1]$  είναι  $g(x) > 0$ , εξ' υποθέσεως. Επομένως είναι  $f(x)g(x) > 0, \forall x \in (0,1]$ . Άρα, είναι:

$$F'(x) > 0, x \in (0,1]$$

οπότε η  $F$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0,1]$ . Επομένως, για  $x > 0 \Rightarrow F(x) > F(0) \Rightarrow F(x) > 0, x \in (0,1]$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x)G(x) > F(x) &\Leftrightarrow f(x) \int_0^x g(t)dt > \int_0^x f(t)g(t)dt \Leftrightarrow \\ \int_0^x f(x)g(t)dt > \int_0^x f(t)g(t)dt &\Leftrightarrow \int_0^x (f(x)g(t) - f(t)g(t))dt > 0 \Leftrightarrow \\ \int_0^x (f(x) - f(t))g(t)dt > 0 &\Leftrightarrow \int_0^x (f(x) - f(t))dt > 0 \end{aligned}$$

η οποία ισχύει, διότι για

$$0 \leq t \leq x \Rightarrow f(0) \leq f(t) \leq f(x) \Rightarrow f(t) - f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) - f(t) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^x (f(x) - f(t))dt > 0$$

γ) Για  $x = 1$  η δοσμένη ανισοσύτητα ισχύει ως ισότητα.

Για  $x \neq 1$  θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(t) = \frac{F(t)}{G(t)}, t \in [x, 1]$ , με  $0 < x < 1$ . Η  $h$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ, οπότε υπάρχει  $\xi \in (x, 1)$  τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi) = \frac{h(1) - h(x)}{1 - x}$$

$$\text{Αλλά, } h'(t) = \frac{F'(t)G(t) - F(t)G'(t)}{G^2(t)} = \frac{f(t)g(t)G(t) - F(t)g(t)}{G^2(t)}$$

Από το ερώτημα β) είναι  $f(t)G(t) > F(t)$  και επειδή  $g(t) > 0$ , έχουμε ότι:

$$f(t)g(t)G(t) - F(t)g(t) > 0.$$

Επομένως είναι:

$$h'(t) > 0 \Rightarrow h'(\xi) > 0 \Leftrightarrow \frac{h(1) - h(x)}{1 - x} > 0 \Leftrightarrow h(1) - h(x) > 0$$

διότι  $0 < x < 1$ . Εισάγωντας στην τελευταία  $h(1) = \frac{F(1)}{G(1)}$  και  $h(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$  προκύπτει:

$$\frac{F(1)}{G(1)} - \frac{F(x)}{G(x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{F(x)}{G(x)} < \frac{F(1)}{G(1)}, x \in (0,1)$$

Συνεπώς, είναι  $\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}, x \in (0,1]$ .

### Άλλος τρόπος

Μέσω της μονοτονίας της συνάρτησης  $h(x) = \frac{F(x)}{G(x)}, x \in [0,1]$

δ) (Μια διαφορετική προσέγγιση...)

Είναι, λόγω του ερωτήματος γ):

$$\left| \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right) \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)x^5} \right| = \left| \frac{F(x) \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{G(x)x^5} \right| = \left| \frac{F(x)}{G(x)} \right| \left| \frac{\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{x^5} \right| =$$

$$\frac{F(x)}{G(x)} \left| \frac{\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{x^5} \right| \leq \frac{F(1)}{G(1)} \left| \frac{\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt}{x^5} \right| = \frac{F(1)}{G(1)} \frac{\left| \int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt \right|}{|x^5|} = \frac{F(1)}{G(1)} \frac{\left| \int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt \right|}{x^5} \leq$$

$$\frac{F(1)}{G(1)} \frac{\int_0^{x^2} |\eta\mu t^2| dt}{x^5} \leq \frac{F(1)}{G(1)} \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^5} = \frac{F(1)}{G(1)} \frac{1}{3} \frac{t^3 \Big|_0^{x^2}}{x^5} = \frac{F(1)}{3G(1)} \frac{x^6}{x^5} = \frac{F(1)}{3G(1)} x$$

και επειδή  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(1)}{3G(1)} x = 0$ , από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right) \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)x^5} = 0$$

### **Σχολιασμός των Θεμάτων**

Τα θέματα είναι, ως συνήθως, κλιμακούμενης δυσκολίας και καλύπτουν ολόκληρη την ύλη. Πιο συγκεκριμένα, κατά τη γνώμη μας:

- Το Θέμα 2 είναι στοιχειώδες ζήτημα στους μιγαδικούς αριθμούς.
- Στο Θέμα 3 το ερώτημα α) είναι στοιχειώδες. Το ερώτημα β) απαιτεί κριτική σκέψη. Το ερώτημα γ) είναι ατυχές, μιας και δεν εξετάζει τίποτα ουσιώδες, αλλά είναι ζήτημα πράξεων. Το ερώτημα δ) επίσης είναι στοιχειώδους περίπτωση υπολογισμού εμβαδού.
- Το Θέμα 4 είναι a priori δύσκολο, διότι ασχολείται με απόδειξη ανισοτήτων, και μάλιστα σε ανοιχτό-κλειστό διάστημα. Το ερώτημα α) δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο. Τα ερωτήματα β), γ), δ) είναι αρκετά πολύπλοκα, αλλά και αρκετά ενδιαφέροντα ταυτόχρονα. Απευθύνονται στους καλούς μαθητές.