Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας[1]

ΘΕΜΑ 1

Α. Σχολικό βιβλίο Σελ. 150.

Β. Σχολικό βιβλίο Σελ. 65.

Γ.

α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2

α.

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4} = \frac{12 + 3\nu_2 + 15 + 32}{13 + \nu_2} = \frac{3\nu_2 + 59}{13 + \nu_2} \qquad (1)$$

$$\bar{x} = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{3\nu_2 + 59}{13 + \nu_2} = 4 \Leftrightarrow \boxed{\nu_2 = 7}$$

β.

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2\nu_i$$

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 20$$

[1] Οι λύσεις που παρουσιάζονται είναι ενδεικτικές αλλά, όχι υποχρεωτικά και μοναδικές

$$s^2 = \frac{1}{20}[(2-4)^2 6 + (3-4)^2 7 + (5-4)^2 3 + (8-4)^2 4] = \frac{98}{20} \Rightarrow \boxed{s^2 = 4{,}9}$$

γ.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{4{,}9}}{4} \cong \frac{2{,}2}{4} = 55\% > 10\%$$

άρα το δείγμα τιμών της μεταβλητής X είναι μη ομοιογενές.

❖

ΘΕΜΑ 3

α.

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7)' = 3x^2 - 12x + \alpha, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$f''(x) = (3x^2 - 12x + \alpha)' = 6x - 12, x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow} 12x - 24 + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 9}$$

β.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-12x+9}{x^2-1} = 3\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = 3\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = 3\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x+1} = 3\frac{(-2)}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1} = -3}$$

γ. Για να δέχεται το διάγραμμα της f εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y = -3x$, θα πρέπει να υπάρχει σημείο του $A(x_0, f(x_0))$ στο οποίο να είναι:

$$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης που διέρχεται από το $A(2, f(2))$ είναι:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2)$$

$$f(2) = -5$$

$$f'(2) = -3$$

οπότε με αντικατάσταση έχουμε:

$$y = -3x + 1$$

Επιμέλεια:
Γιάννης Γ. Ψυχογιός

η οποία είναι και η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης.

❖

ΘΕΜΑ 4

Α.

α.

$$f'(x) = \left(lnx - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}, x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} > 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} < 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 2 - x < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

β. Η f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο στο $x = 2$ το οποίο είναι (ολικό) μέγιστο και ισούται με $f(2) = ln2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$.

Β.

α. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$ έχουμε ότι για:

$$2 < 3 < 4 < 5 < 8 \Rightarrow f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$$

Άρα οι παρατηρήσεις διατεταγμένες από την μικρότερη προς τη μεγαλύτερη είναι:

$$f(8), f(5), f(4), f(3), f(2)$$

και επειδή το πλήθος τους είναι περιττός αριθμός έχουμε ότι η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή:

$$\delta = f(4) \Rightarrow \boxed{\delta = ln4 + \lambda^2 - 6\lambda}$$

Το εύρος είναι:

$$R = f(2) - f(8) \Rightarrow \boxed{R = 3 + ln\frac{1}{4}}$$

διότι $f(2) = ln2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$ και $f(8) = ln8 + \lambda^2 - 6\lambda - 2$.

Επιμέλεια:
Γιάννης Γ. Ψυχογιός

β. Έχουμε:

$$R+\delta<-2 \Leftrightarrow 3+ln\frac{1}{4}+ln4+\lambda^2-6\lambda<-2 \Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+5<0$$

Για το τριώνυμο $\lambda^2-6\lambda+5$ είναι $\Delta=16$, οπότε έχουμε ρίζες $\lambda_{1,2}=\frac{6\pm4}{2}=5{,}1$. Συνεπώς είναι:

$$\lambda^2-6\lambda+5<0 \Leftrightarrow 1<\lambda<5$$

Άρα:

$$A=\{\lambda\in\Omega | R+\delta<-2\}=\{2{,}3{,}4\}$$

και επειδή έχουμε απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα ισχύει ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας, οπότε:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{100}\Rightarrow \boxed{P(A)=0{,}03}$$

❖