ΘΕΜΑ 1

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Γ.

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ 2

α)

$$lim_{x\to 1}\frac{e^x f(x)}{x^2-1} = lim_{x\to 1}\left(\frac{e^x}{x^2-1}\frac{x-1}{e^x}\right) = lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$lim_{x\to 1}\frac{e^x f(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

β)

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{e^x}\right)' = \frac{(x-1)'e^x-(x-1)(e^x)'}{e^{2x}} = \frac{e^x-(x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x+1)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x} \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x) = 2-x, x\in\mathbb{R}$$

γ) Από το β) έχουμε:

$$f'(x) = \frac{2-x}{e^x}$$

Άρα:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{e^x} > 0 \overset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{e^x} < 0 \overset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} 2-x < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty, 2)$ και γνήσια φθίνουσα στο $(2, +\infty)$. Συνεπώς παρουσιάζει ένα μοναδικό ακρότατο στο $x = 2$, το οποίο είναι ολικό μέγιστο και έχει τιμή ίση με $f(2) = e^{-2}$.

ΘΕΜΑ 3

α)

$$\bar{x}_A = \frac{20 + 26 + 24 + 22 + 18}{5} = 22$$

$$\bar{x}_B = \frac{26 + 32 + 19 + 20 + 23}{5} = 24$$

β) Το κόστος (ανά χίλιες ώρες) για την μπαταρία τύπου Α είναι:

$$K_A = \frac{38}{22} = \frac{19}{11}$$

ενώ για την τύπου Β:

$$K_B = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$$

επομένως $\frac{K_A}{K_B} = \frac{\frac{19}{11}}{\frac{5}{3}} = \frac{57}{53} > 1 \Rightarrow K_A > K_B$. Άρα συμφαίρει του τύπου Β, διότι κοστίζει λιγότερο.

γ) Είναι:

$$s_A = \sqrt{\frac{(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2}{5}} = \sqrt{\frac{4 + 16 + 4 + 16}{5}} = \sqrt{8}$$

$$s_B = \sqrt{\frac{(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2}{5}} = \sqrt{\frac{4 + 64 + 25 + 16 + 1}{5}}$$
$$= \sqrt{22}$$

δ) Οι συντελεστές μεταβλητότητας για κάθε τύπο μπαταρίας είναι:

$$CV_A = \frac{s_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{2}}{11}$$

$$CV_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{22}}{24}$$

$$\frac{CV_A}{CV_B} = \frac{24}{11\sqrt{11}} < 1 \Rightarrow CV_A < CV_B$$

επομένως του τύπου Α παρουσιάζουν την μεγαλύτερη ομοιογένεια.

ΘΕΜΑ 4

α) Έστω τα ενδεχόμενα:

A = {Ο κάτοικος διαβάζει την εφημερίδα Α}

B = {Ο κάτοικος διαβάζει την εφημερίδα Β}

Εξ' υποθέσεως έχουμε: $P(A) = 0.5$ και $P(A \cap B') = 0.3$.

Ισχύει:

$$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B') \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $A' \cup B$. Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(A' \cap B) \Leftrightarrow$$

$$1 - P(A) + P(B) - \big(P(B) - P(A \cap B)\big) = 1 - P(A) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A' \cup B) = 0.7$$

β) Είναι: $B \supseteq A \cap B \Rightarrow P(B) \geq P(A \cap B) \overset{\alpha)}{\Rightarrow} P(B) \geq 0.2 \Rightarrow P(B) \geq \frac{1}{5}$. Επίσης: $B \subseteq A' \cup B \Rightarrow P(B) \leq P(A' \cup B) = \frac{7}{10}$. Άρα, είναι:

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$$

γ) Έχουμε:

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x\right)' = 3x^2 - x + P(B)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $3x^2 - x + P(B)$, είναι $\Delta = 1 - 12P(B)$. Από το β) ερώτημα είναι:

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10} \Leftrightarrow -\frac{42}{5} \leq -12P(B) \leq -\frac{12}{5} \Leftrightarrow -\frac{37}{5} \leq 1 - 12P(B) \leq -\frac{7}{5} \Leftrightarrow \Delta < 0$$

Άρα η $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, επομένως η f είναι γνησίως μονότονη (αύξουσα) και επομένως δεν παρουσιάζει ακρότατο.