ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ’ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΕΤΟΥΣ 2007

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Β) Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Γ)

Γ1)

α) Σ, β) Σ, γ) Λ

Γ2)

$$f_1'(x) = \nu x^{\nu-1}$$

$$f_2'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$$

$$f_4'(x) = -\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έχουμε: $f'(x) = (xe^x + 3)' = e^x + xe^x = (xe^x + 3) + e^x - 3 = f(x) + e^x + 3$

β) Έχουμε:

$$\frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x} = \frac{e^x + xe^x - e^x}{x^2 - x} = \frac{xe^x}{x(x-1)} = \frac{e^x}{x-1}$$

οπότε,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Πρέπει: $P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 1 \Leftrightarrow$

$$2P(5) + 2P(5) + 2P(5) + 2P(5) + P(5) + P(5) + P(5) = 1 \Leftrightarrow P(5) = \frac{1}{11}$$

Άρα,

$P(-1) = 2P(5) = \frac{2}{11}$

$P(0) = P(-1) = \frac{2}{11}$

$P(1) = P(-1) = \frac{2}{11}$

$P(2) = P(-1) = \frac{2}{11}$

$P(3) = P(5) = \frac{1}{11}$

$P(4) = P(5) = \frac{1}{11}$

β) Πρέπει: $-1 \in A \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$

Για $x = -1$ είναι: $A = \{1,3,-1\}$ και $B = \{2,0,-1,3\}$, οπότε $A \cap B = \{-1,3\}$. Δεκτό.

Για $x = 2$ είναι: $A = \{1,3,-1\}$ και $B = \{2,3,8,-3\}$, οπότε $A \cap B = \{3\}$. Απορρίπτεται.

Επομένως η μοναδική τιμή του x για την οποία $A \cap B = \{-1,3\}$ είναι το $x = -1$.

γ) Για $x = -1$ είναι: $A = \{1,3,-1\}$ και $B = \{2,0,-1,3\}$, οπότε:

$P(A) = P(1) + P(3) + P(-1) = \frac{5}{11}$

$P(B) = P(2) + P(0) + P(-1) + P(3) = \frac{7}{11}$

$P(A \cap B) = P(-1) + P(3) = \frac{3}{11}$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{11}$

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοήτων, είναι:

$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + \left(1 - P(B)\right) - P(A) + P(A \cap B) \Rightarrow$

$P(A \cup B') = \frac{7}{11}$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Είναι εξ΄ορισμού:

$$\bar{x}_A = \frac{12 + 18 + t_3 + \cdots + t_{25}}{25} = \frac{30 + 345}{25} = 15$$

$$\bar{x}_B = \frac{16 + 14 + t_3 + \cdots + t_{25}}{25} = \frac{30 + 345}{25} = 15$$

Άρα, $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$.

β) Είναι εξ΄ορισμού:

$s_A^2 = \frac{\sum_1^{25}(\bar{x}_A - A_i)^2}{25}$ και $s_B^2 = \frac{\sum_1^{25}(\bar{x}_B - B_i)^2}{25}$

όπου A_i, B_i οι παρατηρήσεις για το δείγμα A και B αντίστοιχα. Τότε:

$$s_A^2 - s_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25}(\bar{x}_A - A_i)^2}{25} - \frac{\sum_{i=1}^{25}(\bar{x}_B - B_i)^2}{25} = \frac{\sum_{i=1}^{25}[(\bar{x}_A - A_i)^2 - (\bar{x}_B - B_i)^2]}{25}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}_A^2 - \sum_{i=1}^{25} 2\bar{x}_A A_i + \sum_{i=1}^{25} A_i - \sum_{i=1}^{25} \bar{x}_B^2 + \sum_{i=1}^{25} 2\bar{x}_B B_i - \sum_{i=1}^{25} B_i^2}{25}$$

και επειδή $\bar{x}_A = \bar{x}_B$, έχουμε

$$s_A^2 - s_B^2 = \frac{-2\bar{x}_A \sum_{i=1}^{25} A_i + \sum_{i=1}^{25} A_i^2 + 2\bar{x}_A \sum_{i=1}^{25} B_i - \sum_{i=1}^{25} B_i^2}{25}$$
$$= \frac{-2\bar{x}_A \sum_{i=1}^{25}(A_i - B_i) + \sum_{i=1}^{25}\left(A_i^2 - B_i^2\right)}{25}$$
$$= \frac{-2\bar{x}_A[(12 - 16) + (18 - 14)] + [(12^2 - 16^2) + (18^2 - 14^2)]}{25}$$
$$= \frac{0 - 112 + 128}{25} = \frac{16}{25}$$

γ) Είναι: $CV_A = \frac{s_A}{\bar{x}_A} \Rightarrow s_A = CV_A \bar{x}_A \Rightarrow s_A = 1$. Από το ερώτημα β) έχουμε:

$$s_A^2 - s_B^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow s_B^2 = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow s_B^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow s_B = \frac{3}{5}$$

οπότε,

$$CV_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{3}{5.15} = \frac{1}{25}$$